第11講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　ユークリッドの互除法

要点①　割り算の余りと最大公約数

187 と 119 の最大公約数は 17 である。この最大公約数を，除法の原理を用いて求めることを考える。

187 を 119 で割ったときの商は 1，余りは 68 である。よって，除法の原理より

$187 = 119 \cdot 1 + 68$ …… ①

と表される。この式を変形すると，次の式が得られる。

$68 = 187 - 119 \cdot 1$ …… ②

ここで，$187 = 11 \cdot 17$，$119 = 7 \cdot 17$ であることから，②より

$68 = 11 \cdot 17 - 7 \cdot 17 \cdot 1 = 17(11 - 7 \cdot 1)$

である。この式から，17 は 68 の約数であることがわかる。

よって，187 と 119 の公約数 17 は，119 と 68 の公約数でもある。

つまり，187 と 119 の公約数を a とすると，a は 119 と 68 の公約数でもある。

また，119 と 68 の公約数を b とすると，①より b は 187 の約数であることがわかる。

つまり，b は 187 と 119 の公約数でもある。

以上より，187 と 119 の公約数と，119 と 68 の公約数は，集合として一致する。

したがって，187 と 119 の最大公約数と，119 と 68 の最大公約数は一致する。

一般に，2 つの自然数 a，b の最大公約数について，次のことが成り立つ。

割り算の余りと最大公約数

自然数 a を自然数 b で割ったときの余りを r とすると，

a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

要点② ユークリッドの互除法

割り算の余りと最大公約数の関係を用いた以下の①と②の手順により，2つの自然数 a と b $(a>b)$ の最大公約数を求める方法を「ユークリッドの　　　　」(または単に「　　　　」)という。

① a を b で割ったときの余りを r とする。

② $r>0$ のとき

a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

よって，a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。

$r=0$ のとき

求める最大公約数は b である。

例 187 と 119 の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求める。

$187=119\cdot1+68$ …… (187 と 119 の最大公約数)＝(　　と　　の最大公約数)

$119=68\cdot1+51$ …… (119 と 68 の最大公約数)＝(　　と　　の最大公約数)

$68=51\cdot1+17$ …… (68 と 51 の最大公約数)＝(　　と　　の最大公約数)

$51=17\cdot3+0$ …… (51 と 17 の最大公約数)＝

したがって，187 と 119 の最大公約数は 17

1 次の２つの自然数の最大公約数を，ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

(1) 1008，810　　(2) 1057，481

Point Pickup

互除法を用いて最大公約数を求める

２つの自然数 a，b $(a>b)$ について

① a を b で割ったときの余りを r とする。

② $r>0$ のとき　a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。

　$r=0$ のとき　b が a と b の最大公約数である。

第11講　PART1 確認問題

次の 2 つの自然数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

1　420，192

$$420 = 192 \times 2 + 36$$

$$192 = \boxed{アイ} \times 5 + \boxed{ウエ}$$

$$\boxed{オカ} = \boxed{キク} \times 3$$

よって，420 と 192 の最大公約数は $\boxed{ケコ}$ である。

2　1041，508

$$1041 = 508 \times 2 + 25$$

$$508 = \boxed{サシ} \times 20 + \boxed{ス}$$

$$\boxed{セソ} = \boxed{タ} \times 3 + \boxed{チ}$$

よって，1041 と 508 の最大公約数は $\boxed{ツ}$ である。

第11講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　ユークリッドの互除法

1　次の 2 つの自然数の最大公約数を，ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

(1)　1008，810　　　(2)　1057，481

[解答]

(1)　$1008=810\cdot 1+198$

$810=198\cdot 4+18$

$198=18\cdot 11+0$

よって，1008 と 810 の最大公約数は 18

(2)　$1057=481\cdot 2+95$

$481=95\cdot 5+6$

$95=6\cdot 15+5$

$6=5\cdot 1+1$

$5=1\cdot 5+0$

よって，1057 と 481 の最大公約数は 1

第11講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：36，ウエ：12，オカ：36，キク：12，
ケコ：12

[解説]

$420=192\times2+36$ [A]

$192=\mathbf{36}\times5+\mathbf{12}$

$\mathbf{36}=\mathbf{12}\times3+0$

よって，420 と 192 の最大公約数は，**12** である。

[A]　2 つの自然数 a，b $(a>b)$ について
① a を b で割ったときの余りを r とする。
② $r>0$ のとき　a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。
$r=0$ のとき　b が a と b の最大公約数である。

2 **[正解]** サシ：25，ス：8，セソ：25，タ：8，チ：1，
ツ：1

[解説]

$1041=508\times2+25$ [B]

$508=\mathbf{25}\times20+\mathbf{8}$

$25=\mathbf{8}\times3+\mathbf{1}$

$8=1\times8+0$ [C]

よって，1041 と 508 の最大公約数は，**1** である。

[B]　2 つの自然数 a，b $(a>b)$ について
① a を b で割ったときの余りを r とする。
② $r>0$ のとき　a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。
$r=0$ のとき　b が a と b の最大公約数である。

[C]　この場合，1041 と 508 は互いに素であることがわかる。